第 11 講　指数の拡張，指数関数

PART1　指数の計算と式の値

1　(1)　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$a+a^{-1}$，$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

(2)　$3^x=5^y=\sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　指数法則および対称式の考え方を用いて式の値を求める。

とくに，$a>0$ のとき　$a^p \cdot a^{-p}=1$

(2)　$a>0$，$b>0$，$a \neq 1$，$b \neq 1$，$x \neq 0$ のとき　$a^x=b \iff a=b^{\frac{1}{x}}$

$a>0$，$a \neq 1$ のとき　$p=q \iff a^p=a^q$

第11講　PART1　確認問題

1　$a>0$，$a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=3$ のとき，$a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$，$a+a^{-1}$ の値を求めよ。

$$a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\text{ア}},\quad a+a^{-1}=\boxed{\text{イウ}}$$

2　$2^x=5^y=10^{\frac{3}{2}}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

第 11 講　指数の拡張，指数関数

PART1　指数の計算と式の値

1 (1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$a+a^{-1}$，$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

(2) $3^x=5^y=\sqrt{15}$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

(1) $a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}$

$=5^2-2\cdot 1=23$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}\right)$

$=5\cdot(23-1)=110$

(2) $3^x=\sqrt{15}$ より　$3^x=15^{\frac{1}{2}}$

両辺を 2 乗して $(3^x)^2=15$　すなわち　$(3^2)^x=15$

両辺を $\dfrac{1}{x}$ 乗して　$3^2=15^{\frac{1}{x}}$ …… ①

$5^y=\sqrt{15}$ より　$5^y=15^{\frac{1}{2}}$

両辺を 2 乗して $(5^y)^2=15$　すなわち　$(5^2)^y=15$

両辺を $\dfrac{1}{y}$ 乗して　$5^2=15^{\frac{1}{y}}$ …… ②

①，②を辺々かけて

$15^{\frac{1}{x}}\cdot 15^{\frac{1}{y}}=3^2\cdot 5^2$　　$15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=(3\cdot 5)^2$　　$15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=15^2$

よって　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$

第11講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：7，イウ：18

[解説]

$$a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2 \quad \text{[A]}$$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^2-2a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}} \quad \text{[B]}$$

$$=3^2-2\cdot 1$$

$$=7$$

$$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}\right) \quad \text{[C]}$$

$$=3(7-1)$$

$$=18$$

（別解）

$$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right) \quad \text{[D]}$$

$$=3^3-3\cdot 1\cdot 3$$

$$=18$$

[A]　$(a^r)^s=a^{rs}$
　　$a^r\cdot a^{-r}=1$

[B]　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

[C]　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

[D]　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

2 **[正解]** エ：2，オ：3

[解説]

$2^x=10^{\frac{3}{2}}$ の両辺を $\frac{2}{3}$ 乗して

$$(2^x)^{\frac{2}{3}}=\left(10^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

すなわち　$\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^x=10$ [A]

この両辺を $\frac{1}{x}$ 乗して

$$2^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}} \cdots\cdots ①$$ [E]

$5^y=10^{\frac{3}{2}}$ の両辺を $\frac{2}{3}$ 乗して

$$(5^y)^{\frac{2}{3}}=\left(10^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

すなわち　$\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^y=10$ [A]

この両辺を $\frac{1}{y}$ 乗して

$$5^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{y}} \cdots\cdots ②$$ [E]

①，②を辺々かけて

$$2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}}\cdot 10^{\frac{1}{y}}$$

$$(2\cdot 5)^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$ [F]

$$10^{\frac{2}{3}}=10^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

よって

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$$ [G]

[E]　$a>0$，$b>0$，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$x\neq 0$ のとき
$a^x=b \Longleftrightarrow a=b^{\frac{1}{x}}$

[F]　$a^r b^r=(ab)^r$
$a^r a^s=a^{r+s}$

[G]　$a>0$，$a\neq 1$ のとき
$p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$